29/5/18

ΑΣΚΗΣΗ 1 Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P: $P^{t} \cdot A \cdot P$: διαγώνιος

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ: $$P_A(t) = |A - tI_4| = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1-t & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1-t & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1-t \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = t^2 \cdot (t+2)(t-6)$$

Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$

• $V(0)$: $(A - 0I_4)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\rightarrow$ /

$$\begin{cases} x+2y+z+2w=0 \\ 2x+y+2z+w=0 \end{cases} \Rightarrow w=-y \quad \text{και} \quad z=-x$$

Γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(0) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{4\times1} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$: βάση του $V(0)$ η οποία βλέπουμε ότι είναι ορθογώνια

$$\Rightarrow \boxed{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} : \text{ΟΚΒ του } V(0)}$$

• $\underline{V(-2)}$: $(A+2I_4)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+z+2w=0 \\ 2x+3y+2z+w=0 \\ x+2y+3z+2w=0 \\ 2x+y+2z+3w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=w \\ z=-y \\ x=-y \end{matrix} \Rightarrow$$

Γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

Άρα: $V(-2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: βάση του $V(-2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} : \text{ΟΚΒ του } V(-2)}$$

• $V(6) = (A - 6I_4)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y = z = w$

Γενική λύση: $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: βάση του $V(6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{ΟΚΒ του } V(6)}$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} : \text{ορθογώνιος}$$

και $^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a. Να βρεθούν τα $a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο A να είναι διαγωνοποιήσιμος

b. Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΛΥΣΗ: a) $P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & a & b & 1 \\ 0 & 1-t & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 2-t & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} =$

$= (1-t)^2 \cdot (2-t)^2$

Ιδιοτιμές: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \ (\text{διπλή}) \\ \lambda_2 = 2 \ (\text{διπλή}) \end{cases}$

A: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}}(V(1)) = 2 \\ \dim_{\mathbb{R}} V(2) = 2 \end{cases}$

• $V(1)$: $(A - I_4) X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ax + bz + w = 0 \\ \gamma w = 0 \\ z + \delta w = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ay + bz = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ z = w = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$

① $a \neq 0$ Τότε: $y=0$ και $z=w=0 \Rightarrow$ Γενική λύση $= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(1) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 / x \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(1) = 1 \neq 2$

② $a = 0 \Rightarrow$ Γενική λύση: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(1) = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 / x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}} V(1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = 0}}$

• $V(2) = (A - 2I_4)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & b & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x + ay + bz + w = 0 \\ -y + \gamma w = 0 \\ \delta w = 0 \end{cases}$

① Αν $\delta \neq 0 \Rightarrow w = 0$ και τότε: $y = 0$ και τότε: Γενική λύση είναι: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(2) = \left\{ z \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 / z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(2) = 1 \neq 2$

$\Rightarrow$

② Αν $\delta=0$, τότε η γενική λύση είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz + (1+a\gamma)w \\ \gamma w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1+a\gamma \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+a\gamma \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Είναι βάση του $V(2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(2) = 2 \Leftrightarrow \boxed{\delta = 0}$

Άρα ο A: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow a=\delta=0$

ⓑ $P_A(t) = (t-1)^2 \cdot (t-2)^2$

Διαιρέτες του $P_A(t)$: $\cancel{1}, \cancel{t-1}, \cancel{t-2}, \cancel{(t-1)^2}, \cancel{(t-2)^2}$, $(t-1)(t-2)$, $(t-1)^2\cdot(t-2)$, $(t-1)(t-2)^2$, $(t-1)^2\cdot(t-2)^2$

Ένα από τα παραπάνω είναι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$

① $$(A - I_4)(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & a\gamma+b\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow a=\delta=0$

Άρα: $\boxed{Q_A(t) = (t-1)(t-2) \Leftrightarrow a=\delta=0}$

$\rightarrow$

② $(A - I_4)(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -a\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

Άρα: $\boxed{Q_A(t) = (t-1)(t-2)^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } \delta \neq 0}$

③ $(A - I_4)^2 \cdot (A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \delta = 0$

$\boxed{Q_A(t) = (t-1)\cdot(t-2) \Leftrightarrow a = \delta = 0}$

Άρα: $\boxed{Q_A(t) = (t-1)^2\cdot(t-2) \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } \delta = 0}$

④ Από το θεώρημα του Cayley-Hamilton:
$P_A(t) = 0 \Leftrightarrow (A - I_4)^2 \cdot (A - 2I_4)^2 = 0$ και άρα:

$\boxed{Q_A(t) = (t-1)^2\cdot(t-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \delta \neq 0 \end{cases}}$

ΑΣΚΗΣΗ 3: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας και έστω ότι: $A^3 = A^2$. Τότε νδο $A^2 = A$

ΛΥΣΗ: Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^3 - t^2$ τότε: $P(A) = A^3 - A^2 = 0$

Τότε $Q_A(t) \mid P(t)$ διαιρέτες του $P(t) = t^2 \cdot (t-1)$ είναι: t, $\cancel{t^2}$, $t(t-1)$, $\cancel{t^2(t-1)}$, $t-1$

Επειδή ο A είναι συμμετρικός, από το ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ $\Rightarrow$ ο A: διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow Q_A(t)$: γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων: $Q_A(t) \neq t^2, \ t^2 \cdot (t-1)$

- Αν $Q_A(t) = t \Rightarrow Q_A(A) = A = 0 \Rightarrow A^2 = A$
- Αν $Q_A(t) = t-1 \Rightarrow Q_A(A) = A - I_n = 0 \Rightarrow A = I_n \Rightarrow$
$\Rightarrow A^2 = A$
- Αν $Q_A(t) = t \cdot (t-1) \Rightarrow Q_A(A) = A(A - I_n) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow A^2 = A$

ΑΣΚΗΣΗ (4): $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Χωρίς να υπολογισθεί η $|A|$, να δειχθεί ότι ο A: αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1}

ΛΥΣΗ: $P_A(t)=|A-tI_3|=-(t^3+1) \Rightarrow$ C-H:
$P_A(A)=0 \Rightarrow -(A^3+I_3)=0 \Rightarrow A^3=-I_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow A\cdot(-A^2)=I_3 \Rightarrow$ A: αντιστρέψιμος και
$=(-A^2)\cdot A$ $\qquad A^{-1}=-A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ (5): $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Να δειχθεί ότι $A>0$ και να υπολογισθεί ο πίνακας: $\left(\sqrt{A}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{2018}$

ΛΥΣΗ: Ο A: συμμετρικός και $A>0$, διότι οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του A είναι:
$3>0$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=8>0$. $P_A(t)=\begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix}=$
$=(t-2)(t-4)$

Ιδιοτιμές: $\begin{cases} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$

- $V(2)=\left\{x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ΟκΒ του $V(2)$
- $V(4)=\left\{x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: ΟκΒ του $V(4)$

$\Rightarrow$

θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: ορθογώνιος πίνακας

και : ${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{A} = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{pmatrix}$

Τότε: $\sqrt{A} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Τότε: $\left(\sqrt{A} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{2018} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{2018} =$

$= \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^2\right)^{1009} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1009}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \cancel{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$
$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Επαγωγικά

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1009} = 2^{1008} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ (6) $(E, <,>)$: Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης $f, g: E \to E$ ενδομορφισμοί του E: $f^* = f$, f: ισομορφισμός
$g^* = g$, $f \circ g = g \circ f$

Τότε: (1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: \langle f(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle = -\langle g(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle$

(2) $\forall \vec{x} \in E: \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = 0$

(3) $\forall \vec{x} \in E: \| (f+g)(\vec{x}) \| = \| (f-g)(\vec{x}) \|$

(4) $f+g$, $f-g$: ισομορφισμοί

(5) Ο ενδομορφισμός: $(f+g) \circ (f-g)^{-1}$: ισομετρία

ΛΥΣΗ: (1) $\langle f(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(g(\vec{y})) \rangle \overset{f^* = f}{=}$

$= \langle \vec{x}, f(g(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, (f \circ g)(\vec{y}) \rangle \overset{f \circ g = g \circ f}{=}$

$= \langle \vec{x}, (g \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, g(f(\vec{y})) \rangle = \langle g(f(\vec{y})), \vec{x} \rangle =$

$= \langle f(\vec{y}), g^*(\vec{x}) \rangle \overset{g^* = g}{=} \langle f(\vec{y}), -g(\vec{x}) \rangle = -\langle f(\vec{y}), g(\vec{x}) \rangle$

(2) $\forall \vec{x} \in E$, από το (1): $\langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = -\langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = 0$

(3) $\| (f+g)(\vec{x}) \|^2 = \langle (f+g)(\vec{x}), (f+g)(\vec{x}) \rangle =$

$= \langle f(\vec{x}) + g(\vec{x}), f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle + 2 \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle +$

$+ \langle g(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle + \langle g(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle =$

$= \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle - 2 \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle + \langle g(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle =$

$= \|$

(4) $\vec{x} \in \ker(f+g) \Rightarrow (f+g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \vec{0}$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = -g(\vec{x})$

Από το (2) $\Rightarrow \langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(\vec{x}), -f(\vec{x}) \rangle = 0$

$\Rightarrow -\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} \xRightarrow{f: \text{ισομορφισμος}} \vec{x} = \vec{0}$ Άρα: $\ker(f+g) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow f+g$: μονομορφισμός $\Rightarrow f+g$: ισομορφισμος, διότι: $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$

$\longrightarrow$

Αν $\vec{x} \in \ker(f-g) \Rightarrow (f-g)(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \|(f-g)(\vec{x})\| = 0$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \|(f+g)(\vec{x})\| = 0 \Rightarrow (f+g)(\vec{x}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$, διότι: $f+g$: ισομορφισμός

Άρα: $\ker(f-g) = \{\vec{0}\} \Rightarrow f-g$: μονομορφισμός

$\Rightarrow f-g$: ισομορφισμός διότι $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$

(5) Θέτουμε $h = (f+g)\circ(f-g)^{-1}$ τότε:

h: ισομετρία $\iff \forall \vec{y} \in E: \|h(\vec{y})\| = \|\vec{y}\|$.

Τότε: $h\circ(f-g) = f+g$. Τότε, $\forall \vec{x} \in E$:

$\|h(f-g)(\vec{x})\| = \|(f+g)(\vec{x})\| \overset{(3)}{=} \|(f-g)(\vec{x})\|$

$\forall \vec{y} \in E$, επειδή η $f-g$: ισομορφισμός $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \vec{x} \in E: \vec{y} = (f-g)(\vec{x})$ και τότε:

$\|h(\vec{y})\| = \|h(f-g)(\vec{x})\| = \|(f-g)(\vec{x})\| = \|\vec{y}\| \Rightarrow$ η h: ισομετρία

Π.Χ.: Αν $g^* = -g$, τότε: $(Id_E + g)\circ(Id_E - g)^{-1}$: ισομετρία

Π.Χ.: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$: ${}^tA = A$, $|A| \neq 0$

${}^tB = -B$, $A\cdot B = B\cdot A$

Τότε: ο $(A+B)\cdot(A-B)^{-1}$: ορθογώνιος

$f_A, f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_A(X) = AX$, $f_B(X) = BX$ $\Rightarrow$ $f_A^* = f_A$, $f_B^* = -f_B$, f_A: ισομορφισμός και $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$

άρα (6) $\Rightarrow (f_A + f_B)\circ(f_A - f_B)^{-1}$: ισομετρία $\Rightarrow$ ο πίνακας της στη συνήθη ΟΚΒ του $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι ο $(A+B)\cdot(A-B)^{-1}$, είναι ορθογώνιος

Π.Χ.: Αν ${}^tB = -B \Rightarrow (I_n+B)\cdot(I_n-B)^{-1}$: ορθογώνιος

ΥΛΗ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1) Κριτήρια Διαγωνοποιησιμότητας
2) Υπολογισμός κ' εφαρμογές ελαχίστου πολυωνύμου
3) Δύναμη πίνακα και εύρεση αντιστρόφου αντιστρέψιμου πίνακα
4) Βασική θεωρία Ευκλείδειων Χώρων
5) Ορθογώνιοι πίνακες και θεώρημα Euler
6) Αυτοπροσαρτημένοι ενδομορφισμοί και συμμετρικοί πίνακες - Φασματικό θεώρημα (κ-οστές ρίζες πινάκων)
Ζ) Θετικοί και μη-αρνητικοί πίνακες - τετραγωνικές μορφές (καμπύλες κ' επιφάνειες)